I. DÉNOMBREMENTS

1. : Soit $\mathbb{E}$ un ensemble de taille n et A une partie de E de taille p ; dénombrer les parties X de $\mathbb{E}$ vérifiant :
   (a) $A \cup X = A$
   (b) $A \cap X = \emptyset$
   (c) $A \cap X = A$
   (d) $A \cup X = \mathbb{E}$

2. : Soit $\mathbb{E}$ un ensemble de cardinal n.
   (a) Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.
   Indication : discuter suivant le nombre d'éléments de A, et déterminer le nombre de parties B possibles dans chaque cas.
   (b) En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.
   (c) En déduire le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E vérifiant $A \sqcup B \sqcup C = \mathbb{E}$.
   (la notation de la réunion avec des symboles à angles droit : $A \sqcup B \sqcup C$ signifie que les ensembles sont 2 à 2 disjoints)
   Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct.
   (d) * Généraliser (c) à un nombre p de parties de $\mathbb{E}$.

3. : Soit $\mathbb{E}$ un ensemble de cardinal n , p et q deux entiers naturels dont la somme est $\leqslant n$;
   (a) On demande de dénombrer de trois façons différentes les couples (A, B) où A et B sont des parties disjointes de E de cardinaux respectifs p et q.
   (b) En déduire que $\binom{n}{p}\binom{n-p}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{p} = \binom{n}{p+q}\binom{p+q}{p}$.
   (c) En déduire par exemple : $(n-p)\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p} = (p+1)\binom{n}{p+1}$

4. :
   (a) Combien le mot *mississippi* possède-t-il d'anagrammes ?
   (b) Quel est le coefficient de $mp^2s^4i^4$ dans $(m+p+s+i)^{11}$?
   (c) * Généraliser (a) et (b).

5. *
   (a) Dénombrer les diagonales d'un polygone convexe à n sommets.
   (b) Dans la suite, les diagonales sont considérées comme des droites (et non simplement comme le segment joignant deux sommets non consécutifs), et on considère un polygone convexe à n sommets tel que si deux diagonales se coupent, il n'y a pas d'autre diagonale passant par leur point d'intersection.
   On demande de dénombrer les points d'intersection de diagonales situés à l'intérieur du polygone et de dénombrer ceux situés à l'extérieur (éventuellement à l'infini si les diagonales sont parallèles).
   REP : $n(n-3)/2, n(n-1)(n-2)(n-3)/24, n(n-3)(n-4)(n-5)/12$.

6. * : Dénombrement des surjections (voir aussi l'exercice 18).
   Soit $S(n,p)$ le nombre de surjections d'un ensemble $\mathbb{E}$ à n éléments vers un ensemble à p éléments. $(n \geqslant p \geqslant 0)$
   (a) Montrer que $p^n = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}S(n,k)$.
   (b) En déduire $S(n,p) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}(p-k)^n = p^n - p(p-1)^n + \binom{p}{2}(p-2)^2 - .....$
   (c) Montrer que le nombre de partitions de $\mathbb{E}$ est $\frac{S(n,1)}{1!} + \frac{S(n,2)}{2!} + \cdots + \frac{S(n,n)}{n!}$.

7. * : Dénombrer les applications surjectives d'un ensemble à $n+1$ (resp. $n+2, n+3$) éléments sur un ensemble à n éléments ; ** généraliser à $n+k$.

8. : On considère les n^p p-listes d'entiers entre 1 et n.

   (a) Combien y en a -t -il parmi elles qui sont strictement croissantes ?

   (b) * Combien y en a-t-il parmi elles qui sont croissantes ?
   Idée : transformer bijectivement une liste croissante en liste strictement croissante.

9. * : Problème de Montmort.
   Soit d_n le nombre de "dérangements" d'un ensemble E à n éléments (un dérangement est une application f bijective de E dans E telle que $f(x) \neq x$ pour tout x dans E).

   (a) Montrer que pour $n \geqslant 3$ $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$

   (b) En déduire que pour $n \geqslant 2$ $d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$.

   (c) En déduire une expression de d_n.

   (d) Quelle est la probabilité qu'une secrétaire mettant au hasard 10 lettres dans 10 enveloppes, aucune des lettres ne soit dans son enveloppe ?

10. : Le paradoxe des anniversaires (cf ausi un sujet d'étude).
    On choisit au hasard une application f de $\mathbb{E}_n$ dans $\mathbb{E}_N$ ($n \leqslant N$)

    (a) Quelle est la probabilité que f soit injective ?

    (b) Quelle est la probabilité que dans votre classe, il y ait au moins deux élèves qui soient nés le même jour de l'année (compter 365 jours par an) ?

    (c) * Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux éléments qui aient la même image par f (et les autres ont des images distinctes) ?

    (d) * Quelle est la probabilité que dans votre classe, il y ait au moins deux groupes disjoints de deux élèves qui soient nés le même jour de l'année ?

11. * : Les familles intersectantes.
    Étant donné un ensemble fini E ayant n éléments, on désigne par *famille intersectante*, un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de E telles que deux d'entre elles ont toujours au moins un élément en commun.

    (a) Soit F un élément d'une famille intersectante $\mathcal{F}$; que peut-on dire de $\overline{F}$? En déduire que $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{n-1}$.

    (b) Montrer qu'il existe une famille intersectante composée de 2^{n-1} parties.

II. **PROBABILITÉS**

12. Concernant les expériences aléatoires suivantes, on demande de donner l'univers des possibles Ω correspondant, ainsi que la valeur de la probabilité des évènements élémentaires.

    (a) Tirer simultanément 8 cartes d'un jeu de 32 cartes.

    (b) Jeter k fois un dé équilibré à n faces.

    (c) L'expérience concerne les sexes des enfants des familles à n enfants, et l'on sait que la proportion des filles parmi les naissances vaut p. A quelle expérience classique est-elle (mathématiquement !) équivalente ?

    (d) L'expérience consiste en la recherche répétée k fois de la bonne clé parmi n clés devant ouvrir une porte :

       i. avec remise de la clé en jeu à chaque fois.

       ii. avec mise de côté de la clé.

    (e) L'expérience consiste en p tirages successifs d'une boule d'une urne renfermant n boules blanches et n boules noires.

       i. Avec remise

       ii. Sans remise.

13. 6 personnes lancent chacune un dé. Quelle est la probabilité

(a) que tout le monde ait un six?
(b) qu'au moins une personne ait un six?
(c) que personne n'ait de 6 ni de 5 ?
(d) que tout le monde ait un nombre différent ?
(e) Qu'il y ait trois 6 exactement ?

14. On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelles sont les probabilités des évènements suivants :

    (a) A : avoir un as au moins
    (b) B : avoir 4 as
    (c) C : avoir la dame de coeur.

15. Les n chansons d'une play-list arrivent dans un ordre aléatoire ; quelle est la probabilité que les chansons 1 et 2 arrivent l'une après l'autre dans cet ordre ?

16. n personnes lancent chacune successivement un dé à 6 faces.

    (a) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir une liste de résultats strictement croissante ? Donner les p_n en pourcentages approchés pour n entre 1 et 6.
    (b) Quelle est la probabilité q_n d'obtenir une liste de résultats croissante ? (cf ex 8). Donner les q_n en pourcentages approchés pour n entre 1 et 6.
    (c) Soit r_n la probabilité que tous les nombres de 1 à 6 soient sortis au moins une fois.
        i. Donner r_k pour $1 \leqslant k \leqslant 6$.
        ii. * Calculer r_n à l'aide de la formule de Poincaré (exercice suivant).
        Réponse : $\dfrac{1}{6^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(-1)^k \binom{6}{k} k^n$
        iii. Déterminer la limite de r_n.

17. *: La formule du crible (ou de Poincaré).
    Soient $A_1, ..., A_n$ n évènements d'un espace probabilisé.

    (a) Montrer que $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < .. < i_k \leqslant n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right)$.
    (b) En déduire la formule duale : $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < .. < i_k \leqslant n} P\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right)$.
    (c) En déduire que si les intersections k à k des A_i ont toutes la même probabilité p_k, alors $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} p$

18. *: Dénombrement des surjections, utilisation de la formule du crible.
    On tire au hasard une application f de $E = \{1, 2, ..., n\}$ vers $F = \{1, 2, ..., p\}$.
    On note A_k l'évènement $\{k \in f(E)\}$.

    (a) Soient $i_i, ..., i_k$ k éléments distincts de F. Que vaut $P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \overline{A_{i_j}}\right)$?
    (b) En déduire grâce à l'exercice précédent que $P\left(\bigcup_{k=1}^{p} \overline{A_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \binom{p}{k} \dfrac{(p-k)^n}{p^n}$.
    (c) En déduire que le nombre de surjections de E vers F vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n$.

19. * : Probabilité d'un dérangement, par la formule du crible (cf. ex 9).

    On tire au hasard une bijection f de $E = \{1, 2, ..., n\}$ dans lui-même.

    On note A_k l'évènement $\{f(k) = k\}$. Soit p_n la probabilité que f ne possède pas de point fixe.

    (a) Calculer p_n en utilisant les évènements A_k, puis la formule du crible (ex. 17).

    REP : $p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

    (b) Quelle est la probabilité qu'une secrétaire mettant au hasard 10 lettres dans 10 enveloppes, aucune des lettres ne soit dans son enveloppe ?

III. CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

20. :

    (a) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes ; étudier l'indépendance des évènements

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{tirer un coeur} \\ B & : & \text{tirer une figure} \\ C & : & \text{tirer un 10} \end{array}$$

    (b) On tire deux cartes d'un jeu de 32 cartes ; étudier l'indépendance des évènements

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{tirer deux coeurs} \\ B & : & \text{tirer deux figures} \\ C & : & \text{tirer un as et un roi} \end{array}$$

21. : $P(A) = p, P(B) = q \neq 1, P(A \cap B) = r$; calculer $P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)$.

    REP : $\frac{1 - p - q + r}{1 - q}$.

22. Soient B et C deux évènements tels que $P(B \cap C) > 0$. Vérifier que

$$P(A|(B \cap C)) = P_B(A \cap B|C) = P_C(A \cap C|B)$$

23. Soient B et C deux évènements indépendants de probabilité non nulle. Vérifier que

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C) + P\left(A|B \cap \overline{C}\right)P\left(\overline{C}\right)$$

24. Un paradoxe classique sur le conditionnement.

    Sachant qu'une famille à deux enfants a déjà au moins une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

    REP : 2/3, car $\Omega = \{FF, FG, GF\}$ avec équiprobabilité.

25. On considère pour une famille de n enfants les évènements :

    A : il y a au plus une fille

    B : il y a au moins une fille et au moins un garçon.

    Y a-t-il des valeurs de n pour lesquelles ces évènements sont indépendants ?

    REP : X =nombre de filles ; $P(A) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1+n}{2^n}$.

    $P(B) = P(1 \leqslant X \leqslant n - 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = n) = 1 - \frac{2}{2^n}$; $P(A \cap B) = P(X = 1) = \frac{n}{2^n}$.

    Alors $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow (n + 1)(2^n - 2) = n2^n \Leftrightarrow n = 3$.

26. Une maladie frappe une proportion $m = 1/1000$ de la population. Un test est proposé, mais parmi les non-malades une proportion $a = 5\%$ a un résultat positif au test, et parmi les malades, une proportion $b = 2\%$ est détectée négative.

    Quelle est la probabilité d'être malade quand on a un résultat négatif, et quelle est la probabilité d'être bien portant quand on a un résultat positif ?

    REP : $bm/(bm + (1-a)(1-m)) \simeq 2\%$ et $a(1-m)/(a(1-m) + m(1-b)) \simeq 95\%$.

    L'énormité de ce dernier résultat consiste est appelée "paradoxe du faux positif".

27. Paradoxe du faux positif, autre rédaction.

    Une maladie a une prévalence p (proportion des malades dans la population) ; un test détectant cette maladie a un taux de faux positifs q (proportion de résultats positifs parmi les non malades).

    Une personne a un résultat positif au test ; soit r la probabilité quelle soit malade.

    Montrer que $r \leqslant \dfrac{p}{p + q(1-p)} \leqslant \dfrac{p}{q}$.

    Si p est petit devant q, r est alors petit, d'où le paradoxe. Par exemple, pour $p = 1/10\ 000$ et $q = 1\%$, (le test est donc fiable à 99%), $r \leqslant 1\%$!!!

28. Déterminer la probabilité d'avoir un full (i.e. un brelan, soit 3 cartes de la même valeur, et une paire) dans une main de 5 cartes prise au hasard dans un jeu de 32 cartes, en utilisant les probabilités conditionnelles.

    REP : 6/899.

29. : Huit équipes de foot disputent les quarts de finale, 5 allemandes et les 3 autres de différents pays. Quelle est la probabilité que ces 3 pays rencontrent les Allemands ? Utiliser les probabilités conditionnelles.

    REP : 4/7.

30. Je ne retrouve plus mes lunettes qui se trouvent dans l'une des n pièces de mon appartement. J'évalue à p_i la probabilité que mes lunettes se trouvent dans la pièce numéro i.

    (a) Mes lunettes ne sont pas dans la pièce $n°1$; quelle est la probabilité qu'elles soient dans la pièce $n°2$?

    (b) Mes lunettes ne sont dans aucune des pièces de numéros 1 à $i-1$; quelle est la probabilité qu'elles soient dans la pièce n°i ?

    REP : $\dfrac{p_i}{1 - p_1 - ... - p_{i-1}} = \dfrac{p_i}{p_i + ... + p_n}$.

31. Transmission avec erreurs.

    Des personnes numérotées 1,2,3, etc se transmettent dans cet ordre une information ; mais chaque personne donne comme information à la personne suivante le *contraire* de l'information reçue avec une probabilité p.

    Quelle est la probabilité p_n que la $n-$ième personne reçoive l'information correcte ? Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

    Indication : chercher d'abord la relation entre p_n et p_{n-1}.

    REP : $p_n = (1-p)\, p_n + p\,(1-p_n) = (1-2p)\, p_{n-1} + p$; $(p_n - 1/2) = (1-2p)\,(p_n - 1/2) = \dfrac{(1-2p)^n}{2}$.

    Si $p = 1$, $p_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$, dans les autres cas, $p_n \to \dfrac{1}{2}$.

32. Les bonnes résolutions.

    Un fumeur impénitent essaie de ne plus fumer. La probabilité qu'il ne fume pas un jour donné est p s'il a fumé la veille et q s'il n'a pas fumé la veille.

    Quelle est la probabilité p_n qu'il ne fume pas le n-ième jour ?

    Limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

IV. **VARIABLES ALÉATOIRES.**

33. On joue n fois à pile ou face, avec une probabilité d'apparition de pile égale à p.

(a) Quels sont l'espérance et l'écart-type du nombre de pile ?
On rappelle la formule du pion : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$;
pour la variance, on pourra commencer par calculer $E(X(X-1))$.
(b) 6 personnes lancent un dé. Quels sont l'espérance et l'écart-type du nombre de 6 ?

34. Les dominos.

On fabrique un jeu de dominos en utilisant tous les nombres de 0 à n. Toutes les combinaisons de 2 nombres sont utilisées, et il y a aussi $n+1$ "doubles". Pour chaque question, on fera l'application numérique $n = 6$ (jeu de domino classique).

(a) Combien y a -t il de dominos en tout ? Soit u_n ce nombre.
(b) Si l'on considère l'ensemble de ces u_n dominos, combien de fois un nombre donné entre 0 et n apparaît-il ? En déduire la somme S_n de tous les nombres écrits sur ces u_n dominos.
(c) En déduire l'espérance de la somme X des deux nombres écrits sur un domino.
(d) * Déterminer l'écart-type de cette somme.
REP : on peut modéliser l'ensemble des dominos par $\Omega = \{(i,j) \in [|0,n|] \ / \ i \leqslant j\}$
$u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 28; S_n = \frac{n(n+1)^2}{2} = 147$; $E(X) = \frac{S_n}{u_n} = n\frac{n+1}{n+2} = 21/4.$

35. Fonction génératrice d'une variable aléatoire entière.

Etant donné une varable aléatoire X à valeurs dans $[|0,n|]$, on pose pour x réel $G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\, x^k$.

(a) Dans le cas où X est le nombre de "pile" dans un jeu de n pile ou face, avec une probabilité d'apparition de "pile" : p, calculer $G_X(x)$.
(b) D'une façon générale, que valent $G_X(1), G'_X(1), G''_X(1)$?
(c) En déduire le calcul de $E(X)$ et celui de $V(X)$ dans le cas du a).

36. Une marque de chocolat offre dans chaque tablette une image d'une collection en comportant n.
Il y a équirépartition des images de chaque type dans les diverses tablettes.

(a) *On achète m tablettes. Quelle est l'espérance du nombre d'images distinctes obtenues ?
(b) ** Quelle est l'espérance du nombre de tablettes à acheter pour avoir la collection complète ?

37. * Un roller tente de sauter au-dessus de barrières placées les unes à la suite des autres. On suppose que s'il a réussi à sauter $n-1$ barrières, la probabilité de succès de saut d'une suite de n barrières est égale à $1/n$. Le roller rajoute une barrière après chaque saut et s'arrête à son premier échec.
Soit X le nombre de barrières que le roller arrive à sauter.
On demande la loi de probabilité de X, son espérance, et sa variance.
REP : $E(X) = e-1, V(X) = e(e-3)$.

38. * Déterminer l'espérance du minimum de p nombres distincts choisis au hasard dans $[|1,n|]$; en déduire l'espérance de leur maximum.

39. Une loterie possède n billets dont p sont gagnants ;

(a) Ayant acheté q billets, quelle probabilité ai-je d'en avoir au moins un gagnant ? Application numérique : $n = 1000, p = 30$, déterminer q pour que cette probabilité soit supérieure à 1/2.
(b) * Quelle est la probabilité d'avoir exactement k billets gagnants ?
(c) * Quelle est l'espérance du nombre de billets gagnants parmi mes billets ? Pour quel q cette espérance est-elle supérieure à 1 ?
(d) * Sachant que chaque lot vaut en moyenne r euros et que chaque billet coûte s euros, déterminer l'espérance de gain quand j'achète q billets (à savoir l'espérance de l'argent rapporté par les lots moins les qs euros).